EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 heures - coefficient : 2

Le sujet comporte 2 pages.

N.B :

- Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé, et d'indiquer clairement les numéros des questions traitées.
- Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
- Il sera tenu le plus grand compte dans la notation de la rigueur des raisonnements, de la précision de la rédaction et de la qualité de la présentation matérielle.
- Dans une large mesure, les questions sont indépendantes les unes des autres.
- Les candidats pourront donc admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
- Des figures à l'appui d'un raisonnement géométrique seront appréciées.
- On note IR l'ensemble des réels.

Dans tout le problème, le plan affine euclidien orienté Π est rapporté à un repère affine orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Tous les arcs paramétrés considérés dans ce problème seront supposés de classe C^k, où k est un entier naturel aussi grand qu'il sera utile.

Etant donnés dans Π un arc paramétré (γ) et un point M de (γ), on note :

- T le point d'intersection de la tangente à (γ) en M et de l'axe (Ox), lorsque ce point existe.
- N le point d'intersection de la normale à (γ) en M et de l'axe (Ox), lorsque ce point existe.

On s'intéresse dans ce problème à l'étude des arcs paramétrés (γ) de Π tels que, pour tout point M de (γ) :

- les points T et N existent,
- la distance de O à la tangente à (γ) en M soit égale à la distance MN, **les points O et N étant de part et d'autre de la tangente en M à (γ).**

On notera (C) l'ensemble de tels arcs.

1°) On considère l'arc (Γ) défini paramétriquement par :

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x(\theta) = \sin\theta\,(1 + (\cos\theta)^2) \\ y(\theta) = (\sin\theta)^2 \cos\theta \end{cases}, \theta \in IR.$$

Etudier et construire (Γ). On précisera les symétries présentées par (Γ) et la nature des éventuels points stationnaires. On utilisera pour la figure une unité de longueur d'environ 5 cm.

Dans les questions **2°**), **3°**) et **4°**), on étudie l'ensemble (C).

2°) Indiquer des transformations géométriques simples laissant l'ensemble (C) globalement invariant.

3°) **a)** Soit (γ) un arc paramétré de $\prod$. Montrer que (γ) est dans (C) si et seulement si, pour tout point M de (γ), les points T et N existent et vérifient que T est le milieu du segment $]\ O\ ,\ N\ [$. On fera une figure.

b) Soit M_0 un point donné du plan. Donner une construction géométrique des tangentes en M_0 aux éventuels arcs de (C) passant par M_0. On notera Ω le milieu du segment $]\ O,\ M_0\ [$. On fera une figure.

4°) **a)** Montrer que x est un paramètre admissible pour tout arc régulier de (C).

b) On considère un arc (γ) d'équation cartésienne :

$y = f(x)$ pour $x \in I$, avec I intervalle de IR et $f \in C^1(I, IR)$.

Montrer que (γ) est dans (C) si et seulement si f vérifie sur I l'équation différentielle (E) : $x\ y' = y\ (\ (y')^2 + 2)$.

c) Résoudre (E), déterminer ses courbes intégrales. On pourra écrire (E) sous la forme : $\frac{y}{x} = g\ (\ y'\ )$ sur un ensemble que l'on précisera puis utiliser le paramètre $t = y'$, ou bien utiliser toute autre méthode.

d) En déduire (C). Le résultat obtenu est-il cohérent avec ceux trouvés en **2°**)?

5°) **a)** Quelle relation existe-t-il entre l'arc (Γ) défini dans **1°**) et (C) ? Comment peut-on décrire un arc de (C) à l'aide de l'arc (Γ) ?

b) Déterminer et représenter l'ensemble F des points de $\prod$ par lesquels passe au moins un arc de (C).

6°) On note (Γ_0) la partie de (Γ) obtenue pour θ variant dans l'intervalle $]\ 0\ ,\ \pi\ [$.

a) Calculer la longueur L de (Γ_0).

b) Calculer l'aire A du domaine limité par (Γ_0).

c) Calculer le volume V intérieur à la surface de révolution engendrée par la rotation de (Γ_0) autour de l'axe (Ox).

d) Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de L, A et V.

FIN DE L'ENONCE